Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2018/2019**
M1 Théorie de Galois **Maria Chlouveraki**

Extensions algébriques de corps - TD 3

Nous rappelons que les racines du polynôme $x^n - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ sont les nombres complexes $e^{2k\pi i/n} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) i$ pour $k = 1, \ldots, n$.

1. Si $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\sqrt{n}$ et $\sqrt{n}i$ sont algébriques sur $\mathbb{Q}$.

2. Si $z \in \mathbb{C}$ est une racine de l'unité, montrer que z est algébrique sur $\mathbb{Q}$.

3. Calculer $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]$ et donner une base de $\mathbb{Q}(a)$ comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel pour :
(i) $a = \sqrt{3}$.
(ii) $a = \sqrt[3]{2}$.
(iii) $a = \sqrt[4]{2}$.
(iv) $a = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
(v) $a = \sqrt{3}i$.

4. Calculer $[\mathbb{Q}(a, b) : \mathbb{Q}]$ et donner une base de $\mathbb{Q}(a, b)$ comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel pour :
(i) $a = \sqrt{3}$ et $b = \sqrt{2}$.
(ii) $a = \sqrt{3}$ et $b = i$.
(iii) $a = \sqrt[3]{2}$ et $b = \sqrt{2}$.
(iv) $a = \sqrt[3]{2}$ et $b = i$.
(v) $a = \sqrt[4]{2}$ et $b = \sqrt{2}$.
(vi) $a = \sqrt[4]{2}$ et $b = i$.
(vii) $a = e^{2\pi i/3}$ et $b = \sqrt{2}$.
(viii) $a = e^{2\pi i/3}$ et $b = i$.
(ix) $a = \sqrt{3}i$ et $b = \sqrt{3}$.
Dans tous les cas ci-dessus, montrer que $\mathbb{Q}(a, b) = \mathbb{Q}(a + b)$.
Quand est-ce que $\mathbb{Q}(a, b) = \mathbb{Q}(ab)$?

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver les polynômes minimaux de $\sqrt{n}$ et de $\sqrt{n}i$ sur $\mathbb{Q}$.

6. Soit $z \in \mathbb{Q}(i)$. Montrer que z est algébrique sur $\mathbb{Q}$ et trouver son polynôme minimal.

7. Soit K/F et $c_1, c_2, \ldots, c_n \in K$. Si $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sont des éléments algébriques sur F, alors $F(c_1, c_2, \ldots, c_n)/F$ est finie et $F[c_1, c_2, \ldots, c_n] = F(c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

8. Soit K/F et $a, b \in K$. Si a est algébrique sur F et b est algébrique sur $F(a)$, alors b est algébrique sur F.